SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES

Ejercicio 1. Estudia la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

i) $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx}, \quad x \in [0,1].$ ii) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

iii) $f_n(x) = ne^{-nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$ iv) $f_n(x) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n, \quad x \in [-1,2].$

v) $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}, \quad x \in [0,1].$ vi) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

vii) $f_n(x) = e^{nx}, \quad x \in [-1,2].$ viii) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{nx}, \quad x \in (0,\pi].$

Ejercicio 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se considera la función $f_n : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n x^n & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\[2ex] \dfrac{n-1}{nx} & \text{si} \quad 1 < x. \end{cases}$$

i) Halla a_n para que $f_n(x)$ sea continua en $[0,+\infty)$.

ii) Calcula $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

iii) Estudia si la convergencia de f_n a f es o no uniforme.

Ejercicio 3. Estudia la convergencia puntual y uniforme de $\{f_n(x)\}$ dada por:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \le \dfrac{-1}{n} \\ \operatorname{sen} \dfrac{\pi n x}{2} & \text{si} \quad \dfrac{-1}{n} \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 1 & \text{si} \quad x > \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Ejercicio 4. Dadas las funciones a) $f_n(x) = x^n \log x$ ii) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$

i) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ y $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

ii) Calcula $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ y estudia si la convergencia de f_n a f es uniforme.

Ejercicio 5. Estudia la convergencia puntual y uniforme de las siguientes series de funciones utilizando la prueba M de Weierstrass. ¿Hay convergencia uniforme? Sabiendo que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calcula $f(2\pi)$, siendo f la función suma.

i) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3\cos(k^2x)}{k^2}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$ ii) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(3^k x)}{2^k}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$